EDUKACJA FILOZOFICZNA ARTYKUŁY I ROZPRAWY
Vol. 59 2015

JAROSŁAW MROZEK
Uniwersytet Gdański

SOCJALIZUJĄCE FUNKCIE DOWODU MATEMATYCZNEGO*

Wstęp. Dowód pełni w matematyce fundamentalną rolę. Dla wielu proces dowodzenia jest kwintesencją matematyki, jest odzwierciedleniem jej natury. Istnieje – jak sądzę – głęboki związek pomiędzy procesem dowodzenia a istotą matematycznej działalności człowieka. Uznawana postać dowodu matematycznego generuje pewną koncepcję matematyki i rozumienie jej funkcjonowania.

Również forma prezentacji dowodu zasługuje na analizę. Często konkretna postać dowodu jest powiązana z takim, a nie innym, rozumieniem jego przeznaczenia i celu. Należy jednak pamiętać, że forma dowodu jest tylko narzędziem dla ukazania sensu i treści dowodu twierdzenia matematycznego. Matematyka używa symboli, jednak nie jest tymi symbolami (tak jak muzyka nie jest zapisem nutowym). Wyraził to dobitnie Carl Friedrich Gauss, który stwierdził, że to, co odgrywa najważniejszą rolę w matematyce, to nie notacja, ale pojęcia – *non notationes, sed notiones*[1].

Jednakże sposób zapisu dowodu matematycznego często przekazuje istotne informacje o pozadedukcyjnej roli, jaką pełni dowód matematyczny w „codziennym" funkcjonowaniu matematyki. Bywa, że trafne pojęcia, wygodna notacja, zręczna symbolika czy komputerowa wizualizacja pomaga przedstawić rozumowanie matematyczne w sposób bardziej intuicyjny i zrozumiały niż liczne, elementarne, pedantycznie wymienione kroki dowodowe dowodu sformalizowanego.

---

* Idee prezentowane w tym artykule były wcześniej dyskutowane na seminarium Zakładu Logiki, Metodologii i Filozofii nauki z moim magistrantem Łukaszem Lipskim, którego wkład w opracowanie poniższego tekstu chciałbym w ten sposób zaznaczyć.

[1] Por. I. Stewart: *Nature's Numbers*. Basic Books, New York 1995.

Przykładowo, dowód twierdzeń arytmetycznych przy użyciu konstrukcji geometrycznych może unaocznić (graficznie zilustrować) zależności liczbowe lub algebraiczne, przez co stają się one wręcz „dotykalne” (namacalne); dowód Twierdzenia Pitagorasa przedstawiony w postaci pomysłowej animacji, mimo że nie do końca ścisły, ma olbrzymie walory edukacyjne i zapewnia poczucie uczestnictwa w „odkryciu” naukowym; wreszcie technika komputerowa pozwalająca na oglądanie barwnych obrazów czterowymiarowej kostki, czy też hiperbolicznej geometrii, w której linie równoległe rozchodzą się, a boki pięciokąta tworzą kąty proste, pozwala przeżyć moment olśnienia. Także dzięki komputerom powstał wideo dowód (*video proof*) pokazujący, jak można trójwymiarową sferę gnieść, wykręcać i naciągać, by w rezultacie ją przenicować (wywrócić „na drugą” stronę)[2] bez rozcinania. Fakt ten jest sprzeczny z naszymi podstawowymi intuicjami przestrzennymi, co świadczy jedynie o tym, że intuicja może nas zawodzić, a „dowód z wizualizacji” daje okazję zobaczenia „czegoś niemożliwego”.

Dowód jest podstawowym narzędziem stosowanym przez matematyków, pozwalającym na przekonanie siebie, bądź innych, o prawdziwości formułowanych tez matematyki. Takie rozumienie dowodu jednak znacząco zubaża rolę, jaką pojęcie to pełni we współczesnej praktyce matematycznej. Należy dostrzec to, że dowód matematyczny może pełnić także inne funkcje, dzięki którym mogą na przykład: wzrosnąć walory edukacyjne „tekstu” matematycznego oraz poczucie uczestnictwa w procesie tworzenia/odkrywania matematyki. Ponadto dowód matematyczny może być traktowany jako element obyczaju życia matematyka i wyróżnik matematycznego sposobu życia.

I. Dowód matematyczny jako narzędzie perswazji. Wiele wskazuje na to, iż głównym aspektem dowodu matematycznego jest element perswazyjny związany z odczuciem potrzeby jego sformułowania w celu upewnienia się, czy też przekonania samego siebie, o prawdziwości sformułowanej tezy. Dowód w licznych definicjach ujmowany jest jako coś, co służy przekonaniu kogoś o czymś (forma przekonania kogoś o czymś). Dowód przez całe tysiąclecia pojmowany był jako ciąg kro-

---

[2] Przy założeniu: samoprzenikliwości „powłoki” sfery, zakazu tworzenia „krawędzi” i rozrywania sfery.

ków rozumowania uzasadniającego pewną tezę na podstawie danych przesłanek. Takie ujęcie sprawy znajduje potwierdzenie w opiniach i wypowiedziach matematyków. Stefan Banach – wybitny polski matematyk – przez dowód rozumiał „sposób wykazywania słuszności przypuszczeń”[3]. Podobnie ujmuje to Reuben Hersh stwierdzając, iż w sensie praktycznym „ dowód matematyczny jest tym, co robimy, aby wszyscy inni uwierzyli w nasze twierdzenia”[4].

(I) To, kogo winien dowód przekonać jest sprawą dyskusyjną. Najlepiej byłoby, gdyby mógł on przekonywać każdego, co może okazać się trudne a nawet niewykonalne.

(II) To, o czym swego odbiorcę ma przekonać dowód zależy w dużym stopniu od poglądu na matematykę. (1) Jeżeli uznajemy, że matematyka jest zbiorem prawd absolutnych, dowód musiałby przekonywać o niezbitej czy absolutnej prawdziwości twierdzenia dowodzonego. (2) Jeżeli natomiast matematykę pojmujemy jako rodzaj formalnej gry, dowód może być pojmowany jako zabieg przekonywujący o zasadności uznania i stosowania nowego twierdzenia w obrębie wspomnianej gry.

Ostatnio S. G Krantz zwrócił uwagę na interesujący aspekt procesu dowodzenia. Stwierdził, że z heurystycznego punktu widzenia „dowód jest zabiegiem retorycznym [wyróżnienie moje – J. M.] służącym przekonaniu kogoś innego o prawdziwości bądź zasadności uznania matematycznego twierdzenia”[5].

(III) Ujęcie dowodu jako szczególnej formy zabiegu retorycznego pozwala na jego analizę z perspektywy sztuki argumentacji. (1) Zawiły, choć ścisły i poprawny formalnie argument często ma mniejszą siłę perswazji niż (2) argument prostszy, nie pozbawiony luk, ale podany czyli zaprezentowany atrakcyjnie. Jednak dowód odwołujący się do powszechnie uznanych prawd, wiedzy zdroworozsądkowej, intuicji czy naoczności nie będzie posiadał absolutnego rygoru precyzji niezbędnego, by przekonać zawodowego matematyka.

---

[3] Tak Stanisław Ulam określił Stefana Banacha praktyczne pojmowanie dowodu. Por. S. Ulam: PRZYGODY MATEMATYKA. Warszawa 1996, s. 65.

[4] R. Hersh: *What Is Mathematics Really?* New York, Oxford, Oxford University Press, 1997, s. 49.

[5] S. G. Krantz: *History and Concept of Mathematical Proof*, AMS 2007, s. 3

Dowody matematyczne koncentrują swe perswazyjne wysiłki na przekonaniu tych, którzy mogą zostać uznani za odbiorcę kompetentnego. Konsekwencje takiego podejścia są olbrzymie. Pogoń za absolutną ścisłością rozdyma dowody matematyczne do setek i tysięcy stron[6], co prowadzi do problemów z ich dostępnością i sprawia, że „stają się odpowiednie (dostępne) dla niewielu a niedostępne dla wielu”[7]. Ścisłe i kompletne dowody są jednak koniecznością, gdyż: „matematycy to sceptyczni ludzie. Używają wielu sposobów … próbując odnaleźć odpowiedzi na pytania matematyki; jednak zasadniczo nie są przekonani o poprawności odpowiedzi, póki nie zdołają jej dowieść”[8]. W chwili obecnej nikogo nie dziwią dowody, które z uwagi na wymóg ścisłości i uniknięcia luk w rozumowaniu liczą sobie setki stronic.

Kompetentny matematyk może śledzić tok dowodu i sprawdzać jego poprawność, ale na podstawie samej procedury bardzo trudno jest dociec: skąd się wziął pomysł dowodu, jaka jest geneza idei takiego a nie innego sposobu dowodzenia. Te kwestie zawsze były ważne dla tych, którzy interesowali się matematyką z ogólniejszego punktu widzenia, dla „odbiorców matematyki” – matematyków, filozofów, psychologów, studentów. Jednak sami twórcy dowodów matematycznych nieczęsto zdradzali tajemnice swojej twórczości.

Gauss mawiał: *gdy ktoś zbudował świetny budynek, rusztowanie nie powinno być widoczne*. Ale jak większość matematyków otrzymywał on wynik w sposób nieformalny, a następnie doprecyzowywał do postaci porządnego dowodu i tylko tę wygładzoną wersję podawał do publicznej wiadomości. Taka była powszechna praktyka. Matematyka miała swoją „scenę” oraz „kulisy”. Jednak z punktu widzenia odbiorcy dowodu bardziej interesujące jest „rusztowanie” niż sam „budynek”. Nawet dla

---

[6] „Obecny rekord wśród metod konwencjonalnych należy do dowodu, który ukończono na początku lat osiemdziesiątych [XX w. – J. M.]. Dotyczy on klasyfikacji prostych grup skończonych […]. Dowód ten składa się z ponad 300 artykułów o łącznej objętości ponad 15 tysięcy stron napisanych przez ponad stu autorów. Tylko jeden człowiek, Daniel Gorenstein z Rutgers, znał cały dowód” (J. Horgun: *Śmierć dowodu*. „Świat Nauki”. Grudzień 1993, s. 84).

[7] Por. D. Tall: *The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof for All or for Some*. Conference of a University of Chicago School Mathematics Project, 1988.

[8] D. J. Velleman: *How to Prove It. A Structured Approach*. Cambridge University Press 1994, s. 82.

matematyków nie tylko samo istnienie dowodu jest ważne, ale interesujący jest przepływ idei, wpływów, inspiracji, pozwalających wymyśleć (podać, stworzyć, skonstruować) dowód.

II. Dowód – sposób partycypacji w matematyce. Traktowanie dowodu jako narzędzia przekonywania kogoś do własnej tezy okazuje się często niewystarczające z punktu widzenia „odbiorcy" dowodu. Ci, którzy na serio interesują się matematyką, nie zadowalają się powierzchowną znajomością faktów matematycznych w stylu: ta teza jest twierdzeniem matematycznym. Oczekiwania zapoznających się z dowodem, śledzących logikę rozumowania zastosowaną w procedurze dowodowej są większe. Odczuwają oni potrzebę dotarcia do głębszej struktury dowodu i dostrzeżenia zależności między krokami dowodu pozwalających w intuicyjny sposób dostrzec ukryty sens, a także szersze znaczenie (czyli usytuowanie w pewnym kontekście) danego twierdzenia. Te elementy pozwalają przeniknąć „zewnętrzne formy" dowodu i dotrzeć do jego racjonalnego jądra – to znaczy w pełni je rozumieć. Henry Poincare pytał: „czy zrozumienie dowodu twierdzenia sprowadza się do zbadania kolejno każdego z tworzących go sylogizmów i upewnienia się o ich poprawności, zgodności z regułami gry?" i odpowiadał: „dla niektórych tak; gdy to uczynią powiedzą zrozumiałem. Dla większości nie. Niemal wszyscy mają większe wymagania: pragną wiedzieć nie tylko czy sylogizmy tworzące dowód są poprawne, ale dlaczego łączą się w ten sposób, a nie inny. Dopóki wydają się im zrodzone z kaprysu, nie zaś z rozumu świadomego celu, który pragnie uzyskać, nie uznają iż zrozumieli"[9].

Potrzeba intuicyjnego objęcia istoty matematyki jest wyrazem chęci uczestnictwa w pierwotnym, (przed)dedukcyjnym momencie olśnienia, które często towarzyszy matematycznemu odkryciu. Przekonanie o całkowitej pewności treści uchwyconych w krótkim błysku intuicji jest tu ważnym szczegółem. Wskazuje bowiem na wtórny (*sic!*) charakter dowodzenia w matematyce. Matematyk jest subiektywnie przekonany o prawdziwości odkrytego (w akcie olśnienia) faktu matematycznego, dopiero później podejmuje próby sformułowania dowodu. Jest to bowiem metoda, aby tę swoją subiektywną prawdę w jakiś sposób udo-

[9] H. Poincare: *The Foundations of Science*, cytat za: D. Tall, *op. cit.*

stępnić i przekazać innym. Gdy – ponadto – jest to dowód sprzyjający wywołaniu, w głębszego zrozumienia u odbiorcy, poczucia uczestnictwa w matematyce, jest wtedy niezastąpiony wszędzie tam, gdzie chodzi o nauczanie. Wytworzenie u uczącego się poczucia, że miał aktywny udział w umysłowej działalności, która ma znamiona twórczości matematycznej, jest zadaniem i efektem uzyskanym dzięki partycypacyjnym aspektom dowodu matematycznego.

W tym przypadku znajomość szczegółowych kroków dowodowych nie jest tak istotna, jak wyzwalanie u uczącego się autentycznej chęci poznawczej i poczucia uczestnictwa w odkrywaniu prawdy. Dużą rolę w tym procesie może odegrać prezentacja dowodów przy użyciu środków graficznych, która czasami jest niezastąpiona w myśl powiedzenia: *lepiej raz zobaczyć niż sto razy usłyszeć*.

Rola rysunku, ilustracji czy wykresu w prezentacji dowodu matematycznego jest niezmiernie znacząca, Jest to element pozwalający na zaangażowanie bardziej kreatywnej, imaginacyjnej i twórczej strony naszego intelektu. Rysunek – mimo, że partykularny – jest już nacechowanym pewną koniecznością elementem świata prawd matematycznych. Przez co angażuje odbiorcę dowodu i przenosi go w samo sedno matematycznej działalności. Ilustracje obecne w prezentacji dowodu unaoczniają jego partycypacyjne własności – to, że dowód matematyczny może okazać się przepustką do matematyki samej.

Jednak posługiwanie się rysunkami może prowadzić matematyków na manowce. „Proces uogólnienia wychodzący od widocznych figur zawiera w sobie trywialne ryzyko mylnego uznania przypadkowych własności konkretnej figury za własności przynależne jej z istoty … oraz poważne niebezpieczeństwo przyjęcia bez dowodu kluczowych faktów topologicznych, wspólnych wszystkim rysunkom w fizycznej przestrzeni do której te rysunki należą”[10]. Nie powinno zatem dziwić, że w poszukiwaniu jak największej ścisłości matematycznych dowodów stopniowo porzucano ilustracje, by w końcu z ich braku uczynić powód do dumy[11].

Niemniej w nauczaniu, na wykładach, w książkach popularyzujących osiągnięcia matematyki dominuje coś, co jest substytutem dowodu,

[10] M. Black: *The Nature of Mathematics*. New York Humanities Press 1950, s. 154.

[11] Por. N. Bourbaki: *Éléments de mathématique*.

a co można nazwać „dowodem agitacyjnym" (agitacją matematyczna). Ten typ dowodu spotykamy powszechnie w praktyce matematycznej po dzień dzisiejszy wszędzie tam, gdzie nie ma miejsca, czasu lub potrzeby, aby przedstawiać kompletny – w świetle wymogów logiki – dowód matematyczny. Dowód prezentowany studentom matematyki na wykładach jest często entymematyczny, posługuje się intuicją, odwołuje się do zdrowego rozsądku czy wyobraźni; występują w nim luki w ciągu logicznych kroków, a więc nie przedstawia sobą *continuum* logicznego. To jest cena zajmowania się matematyką „na co dzień". Jednak nawet tego typu argumentacje matematyczne stanowią niezwykle istotny element życia matematycznego. Wykład z danej dziedziny matematycznej nie może zamienić się w prezentację samych uzyskanych wyników bez jakiejkolwiek próby przybliżenia idei dowodu danego twierdzenia, jego struktury, stosowanej metody dowodzenia czy wręcz jego powtórnego przeprowadzenia. Matematyka na wykładzie musi „dziać się" *hic et nunc* (tu i teraz), a dowodzenie wygłaszanych tez jest praktyką matematyki uświęconą tradycją – jest elementem rytuału życia matematycznego.

III. Dowód – element rytuału (życia matematycznego). Dowodzenie matematykom tak „weszło w krew", że często dowodzą tego, co sami już udowodnili. Wiemy, że w 1797 roku Gauss udowodnił *Zasadnicze Twierdzenie Algebry,* a później podał jeszcze trzy inne dowody w latach 1815, 1816, 1849. W przypadku innego fundamentalnego twierdzenia Gauss podał siedem jego różnych dowodów, a obecnie istnieje ponad 40 dowodów tego twierdzenia[12]. Taka multiplikacja sposobów dowodzenia przynosi często wymierne efekty poznawcze, gdy znaną i stosowaną w jednym obszarze matematyki procedurę dowodu przenosi się na inne przypadki. Gdy stare pomysły odtwarzamy na nowym gruncie, to zyskujemy nowy punkt widzenia, zarówno na samą technikę dowodzenia, jak i „materię" dowodu czyli sens nowo powstałej teorii. Ponadto – co niebagatelne – takie działania przyczyniają się do postępu metodologicznego w matematyce oraz – co może okazać się

[12] Por. A. P. Juszkiewicz (red.): *Historia matematyki*, t. III (tłum. z ros. S. Dobrzycki). Warszawa 1977, s. 135 (chodzi o dowód *Kwadratowego Prawa Wzajemności* z *Disquisitiones arithmeticae*).

zaskakujące dla samych matematyków – zaświadczają, że tworzenie nowej matematyki jest procesem społecznym. Na ten aspekt funkcjonowania matematyki zwraca uwagę Thomas Tymoczko podkreślając, że „matematycy nawet idealni są w stanie uprawiać i znać matematykę tylko przez uczestnictwo w społeczności matematycznej”[13]. Ważne z punktu widzenia filozofii matematyki pojęcia dowodu i praktyki dowodzenia znajdują lepsze wytłumaczenie tego, na czym polega dowodzenie na gruncie teorii zbiorowego podmiotu poznania (*public theory*) w matematyce niż w koncepcjach zakładających teorie pojedynczego [idealnego matematyka] podmiotu poznania (*private theory*).

Zdarza się, że dowód przeprowadzany bywa dla samej czynności dowodzenia, o czym świadczy wypowiedź Einsteina: „Kiedy nie mam specjalnie nad czym myśleć, uwielbiam rekonstruować dowody znanych mi od dawna teorii matematycznych i fizycznych. Nie ma to specjalnie celu, jest to tylko okazja do przyjemnego zajęcia się myśleniem”[14]. W podobnym tonie wypowiadał się Michał Heller – polski filozof i kosmolog, laureat w 2008 r. nagrody Templetona. W którymś ze swoich esejów poświęconych metodyce pracy naukowej napisał on, że znajdował ukojenie i inspirację dla swoich dalszych badań dzięki „zanurzeniu się w surowym świecie abstrakcji matematycznych”[15] i ponownym przeprowadzaniu ścisłych rozumowań dowodów znanych twierdzeń.

Na uwagę zasługuje interpretacja przytoczonych faktów, mająca swoje filozoficzne umocowanie w uwzględnieniu aksjologicznego podejścia do matematyki. Można na dowód matematyczny spojrzeć pod kątem jego preferowanych cech. Społeczność matematyków wypracowała i posługuje się, w odniesieniu do teorii matematycznych ale także w stosunku do dowodów, takimi kategoriami jak: piękno, elegancja, ścisłość, prostota.

Można więc przyjąć, że zajęcie się dowodzeniem dla samego dowodzenia, oznacza pewien rodzaj estetycznego upodobania, jakie matema-

---

[13] Por. T. Tymoczko: *Zróbmy miejsce matematykom w filozofii matematyki*. PRINCIPIA X-XI (1994) s. 105-122.

[14] B. Parker: *Einstein. Pasje uczonego*. Warszawa 2006, s. 120

[15] Przytaczam z pamięci.

tyk odnajduje w precyzji i jasności samej procedury dowodzenia. Dowodzenie twierdzenia matematycznego, kiedy ma się do czynienia z twierdzeniami (tezami) uprzednio udowodnionymi a sam proces dowodzenia ma charakter wtórny, jest zatem rodzajem sposobu obcowania z matematyką (matematycznym pięknem). Takie postępowanie ma cechy rytuału. Rytuał ten nacechowany jest z jednej strony poczuciem estetycznej satysfakcji podobnemu temu, jakie odczuwalne jest przez odbiorcę w zetknięciu się z dziełem sztuki. Z drugiej strony, rytuał ten stanowi pewien element higieny umysłu. Przeprowadzający dowód, nawet przy jego rekonstrukcji, ma poczucie wykonywania ćwiczenia duchowego przenoszącego go w świat matematyki samej – prawdziwej i pięknej . Davis i Hersh ten szczególny rodzaj rytuału określają „celebracją potęgi czystego rozumu”[16].

Możliwość estetycznego odbioru matematycznej treści jest faktem potwierdzonym przez opinie matematyków. Morris Kline w pracy poświęconej roli matematyki w kulturze napisał: „wiele poszukiwań nowych dowodów dla twierdzeń, które już zostały słusznie zaakceptowane, zostaje podjętych tylko dlatego, że istniejące dowody nie posiadają walorów estetycznych … dowód przeprowadzony z elegancją jest poematem we wszystkich aspektach poza formą swojego zapisu”[17]. Powiązanie uniwersaliów prawdy i piękna, wskazywać może pewien sposób interpretacji estetycznej natury matematycznych treści. Dowód matematyczny w tym ujęciu byłby piękny z uwagi na swoją prostotę i elegancję. Dowód piękny to taki, który nie używa większej ilości środków niż jest to konieczne i to takich, które są nie tylko „oszczędne” ale i „wyrafinowane” (wyjątkowo heurystyczne). Oczywiście prostota czy elegancja toku dowodu nie są kategoriami łatwymi do oszacowania dla laika. Być może piękno w pełni dostrzec i docenić może tylko matematyk. Wskazuje to na pewien elitarny rys estetycznej strony matematyki. Większość

---

[16] P.J. Davis, R. Hersh: *The Mathematical Experience*. Birkhäuser Boston 1981, Ch. IV, Proof.

[17] M. Kline: *Mathematics In Western Culture*. Oxford University Press, New York 1953, s. 470

matematyków akceptuje pogląd Wignera[18], że współczesna matematyka wyraża l u d z k i e poczucie estetyki. Pojęcia są wyselekcjonowane jako matematyczne, ponieważ rozwijają piękno twierdzeń i piękno teorii. „Być może niełatwo jest zdefiniować matematyczne piękno, ale w tym samym stopniu dotyczy to każdego piękna … Wzorce będące dziełem matematyka, podobnie jak wzorce malarza lub poety, muszą być piękne: idee, tak jak barwy czy słowa muszą pasować do siebie w harmonijny sposób. Piękno jest pierwszym sprawdzianem: na świecie nie ma miejsca dla brzydkiej matematyki”[19].

Piękna matematyki można upatrywać również we wzajemnym dopasowaniu elementów pozornie zupełnie odmiennych od siebie (na przykład w sławnym wzorze Eulera: $e^{i\Pi} = -1$). To kryterium matematycznego piękna daje się wykorzystać także przy estetycznej analizie dowodu matematycznego. Wzajemne dopasowanie elementów dowodu, spójność struktury dowodu, gdy żaden element nie jest zbędny czy niepotrzebny, może być kryterium uznania dowodu, w kategoriach prostoty i elegancji, za „piękny”. „Piękno” dowodu może wypływać także z zaskoczenia, zdumienia towarzyszącego powiązaniu zupełnie różnych dziedzin matematyki, gdy rezultaty uzyskane w jednej dyscyplinie matematycznej znajdują nieoczekiwane zastosowanie w innej.

Element estetyczny obecny w procesie dowodzenia także nie wyczerpuje możliwości interpretacyjnych rytualnego aspektu dowodzenia. Przeprowadzaniu dowodu „dla samego dowodzenia” towarzyszyć może poczucie wykonywania pewnego ćwiczenia umysłu czy dbałości o higienę ducha. Nie chodzi tu o przyjemność ćwiczenia myślowego czy dowodzenie dla udoskonalania własnych możliwości. Dowód matematyczny może być traktowany jako element wysiłku poznawczego zmierzającego do uporządkowania świata. Jest to postępowanie pozwalające odzyskać zaufanie, że rzeczywistość, przynajmniej na tym jej wycinku, daje się uporządkować. Matematyk, podejmując starania o „uporządkowanie świata” dookoła siebie, porządkuje sam siebie i jest to wystarcza-

---

[18] Zob.: E. Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*, w: *Symmetries and Reflections*. Indiana University Press, Bloomington, 1967, s. 222-237.

[19] G..H. Hardy: *Apologia matematyki* (tłum. z ang. M. Fedyszak). Warszawa 1997, s. 63-64.

jącym usprawiedliwieniem dla czynności dowodzenia, nawet wtedy, gdy chodzi o rekonstrukcję znanych dowodów.

Summary

The aim of the paper is to show the complexity of problems concerning mathematical proof - in particular, the aspects of the process of proving theorems in mathematics that are important for the community of mathematicians. The proof appears in mathematics mainly as a tool enabling the justification of a given theorem. In this sense the proof can be perceived as an argumentative tool that can persuade other mathematicians. The justifying aspect of a mathematical proof is - as it seems - the most important role that the proof plays in mathematics. It is a ‘certificate’ of the truthfulness of the considered theorem.

However, apart from the persuasive aspect, the role that the proof plays in mathematics is much more complex. The proof can serve as a way of making accessible a ‘fragment’ of mathematical reality to an adept of mathematics. By following attentively the progression of a proof, a beginning mathematician performs a ‘reconstruction of mathematical discovery’, thus participating – though ‘secondarily’ – in discovering mathematical truth. This is the 'way' that leads to the essence of how mathematics functions as science. This participative character of a mathematical proof – understood as a pass to participate in a mathematical experience – is highly essential for the process of mathematical education.

The third dimension of the functioning of a mathematical proof in mathematical practice is its ritualistic character. Proving – once again – the already proven theorems, repeating one more time the steps of the proving process accepted earlier, not only do we again get stronger in our conviction that a given theorem is true, but we also deepen our understanding of the performed reasoning. Such a conduct can be a component of a ‘mathematical way of life’ of a mathematician. The process of carrying out a proof can be perceived as an element of celebration, ritual, ceremonial, present in the life of a mathematician. Thanks to it a mathematician can appreciate the beauty and elegance of the conducted proofs, at the same time keeping his brain ‘in aptitude’.

Key words: mathematical proof, persuasion, participation, ritual.