EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 59 2015 POLEMIKI I DYSKUSJE

TOMASZ LECHOWSKI
Uniwersytet Warszawski

ROZWIĄZANIA PARADOKSU LOTERII

Paradoks loterii został po raz pierwszy opisany przez Henry'ego Kyburga[1] w roku 1961. Należy on do grona paradoksów dotyczących pewnych pozornie jasnych terminów języka naturalnego (w przypadku paradoksu loterii terminem tym jest *racjonalność*, a w szczególności *racjonalne uznawanie zdań za prawdziwe*), z którymi wiążemy różne zdroworozsądkowe intuicje. Intuicje te, gdy zapisane w sposób formalny, okazują się sprzeczne, to jest - nie mogą wszystkie na raz być prawdziwe.

Paradoks loterii opiera się na poniższych trzech przesłankach, które razem prowadzą do sprzeczności, natomiast każdą z osobna skłonni jesteśmy uznać za prawdziwą.

- Przesłanka 1.: Jeśli to, że zdanie *p* jest prawdziwe jest bardzo prawdopodobne (w potocznym rozumieniu słowa *prawdopodobne*), to racjonalnym jest uznawać za prawdziwe zdanie *p*.
- Przesłanka 2.: Jeżeli racjonalnym jest uznawać zdanie *p* za prawdziwe i racjonalny jest uznawać zdanie *q* za prawdziwe, to racjonalnym jest uznawać za prawdziwą koniunkcję tych zdań, to jest $p \wedge q$.
- Przesłanka 3.: Nie jest racjonalnym uznawać za prawdziwe zdania, o którym wiadomo, że jest sprzeczne.

W niniejszej pracy przedstawiam różne próby rozwiązania paradoksu. Pierwsza jej część poświęcona jest omówieniu samego paradoksu. Kolejne dwie części poświęcone są odpowiednio pierwszej i drugiej przesłance. W tychże częściach proponuję interpretacje (bądź

[1] Zob. Kyburg 1961, s. 197-99.

modyfikacje) wspomnianych przesłanek w sposób, który pozwala uniknąć paradoksu. Ostatnia część pracy jest podsumowaniem poczynionych spostrzeżeń.

Paradoks loterii. Spośród trzech przesłanek, na których opiera się paradoks loterii, jedynie pierwsze dwie są przedmiotem dyskusji[2]. Pierwsza, nazywana czasem tezą Locke'a, stwierdza, że istnieje (ale nie określa go) pewna granica pewności, której przekroczenie powinno skłonić racjonalnego agenta do uznania danego zdania za prawdziwe. Przykładowo: bardzo wiele wskazuje na to, że 7. lipca 2014 roku temperatura w Warszawie przekroczy 10 stopni ºC (oznaczmy to zdanie literą *p*). Zdanie *p* jest bardzo prawdopodobne, a więc racjonalnym jest uznać, że jest prawdziwe, to jest, że 7. lipca 2014 roku temperatura w Warszawie przekroczy 10 stopni ºC.

Potoczne rozumienie słowa *prawdopodobne* można uściślić odwołując się do teorii prawdopodobieństwa.

- Przesłanka 1.': Jeśli P(*p* jest prawdziwe) > *c*, gdzie P to funkcja prawdopodobieństwa, *p* - dowolne zdanie, a *c* to pewna stała bliska 1, to racjonalnym jest uznać, że *p* jest prawdziwe.

Tak przeformułowaną tezę Locke'a możemy zastosować wprost w przypadku gier losowych. Załóżmy, że *c* jest równe $4/5$. Prawdopodobieństwo wypadnięcia 6tki na sześciennej, rzetelnej kostce jest równe $1/6$.

Ponieważ:

P(6tka nie wypadnie) = $5/6 > 4/5 = c$

Wnioskujemy na tej podstawie, że racjonalnym jest uznać, że 6tka nie wypadnie.

[2] Douven 2006 oraz Wheeler 2007.

Druga przesłanka, nazywana również zasadą konglomeracji przekonań, pozwala nam łączyć przekonania. Jeżeli racjonalny agent uznaje[3], że zdanie *2+2=4* jest prawdziwe, a także uznaje, że zdanie *Śnieg jest biały* jest prawdziwe, to za prawdziwe uzna także zdanie będące koniunkcją powyższych, to jest, *2+2=4 i śnieg jest biały*. W przypadku rozważanym powyżej dotyczącym rzutu kostką, racjonalnym jest uznać, że 6tka nie wypadnie, ale równie racjonalnym jest uznać, że nie wypadnie 5tka, gdyż prawdopodobieństwo wypadnięcia (a co za tym idzie także niewypadnięcia) obu tych liczb jest równe:

P(6tka wypadnie) = P(5tka wypadnie)
P(6tka nie wypadnie) = 1 – P(6tka wypadnie)
= 1 – P(5tka wypadnie)
= P(5tka nie wypadnie)

W związku z tym, zgodnie z drugą przesłanką, racjonalne jest uznanie koniunkcji tych zdań, to jest zdania mówiącego, że nie wypadnie ani 6tka ani 5tka. Kontynuując ten tok rozumowania dochodzimy do wniosku, że racjonalnym jest uznać, że żadna z liczb nie wypadnie. Rzut kostką jednak zweryfikuje to przekonanie.

Ściślej: załóżmy, że wszystkie trzy przesłanki (Przesłanka 1', 2 i 3) są prawdziwe. Rozważmy loterię, w której jest $\left\lceil \frac{1}{1-c} \right\rceil + 1$ losów (gdzie c to stała, o której mowa w Przesłance 1', natomiast $\lceil\ \rceil$ to funkcja, która każdej liczbie rzeczywistej przypisuje najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od niej) i dokładnie jeden z nich wygrywa. Wtedy:

$$\text{P(los nr } i \text{ wygra)} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{1-c} \right\rceil + 1} < \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{1-c} \right\rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{1-c}} = 1 - c$$

W związku z powyższym:

---

[3] W niniejszej pracy sformułowania *racjonalny agent uznaje* i *racjonalnym jest uznać* traktowane są jako tożsame.

P(los nr i nie wygra) = 1 – P(los nr i wygra) $> 1 - (1 - c) = c$

Zgodnie z Przesłanką 1', racjonalnym jest uznanie zdania *los nr i nie wygra* za prawdziwe, gdzie *i* to liczba całkowita z przedziału $\left[1, \left\lceil\frac{1}{1-c}\right\rceil + 1\right]$. Innymi słowy, racjonalnym jest uznanie, że każdy los z osobna przegra. Zgodnie z Przesłanką 2, możemy połączyć te zdania koniunkcją, by otrzymać zdanie: *los nr 1 nie wygra i los nr 2 nie wygra i ... i los nr* $\left\lceil\frac{1}{1-c}\right\rceil + 1$ *nie wygra*, to jest zdanie mówiące, że żaden z losów nie wygra. Jednocześnie uznajemy zdanie (na podstawie naszej wiedzy o rzetelności loterii) mówiące, że jeden los wygra. Posiłkując się raz jeszcze Przesłanką 2, dochodzimy do racjonalnego uznania zdania sprzecznego: *żaden los nie wygra i jeden los wygra*. Stoi to w sprzeczności z trzecią przesłanką. Warto w tym miejscu podkreślić, że w żadnym miejscu powyższego wywodu c nie zostało sprecyzowane, a więc paradoks powstaje niezależnie od przyjętej wartości dla *c*.

Teza Locke'a. Zgodnie z Tezą Locke'a istnieje pewna granica pewności, której przekroczenie powinno skłonić racjonalnego agenta do uznania danego zdania za prawdziwe. Sama teza nie określa gdzie dokładnie ta granica przebiega. Pierwszym sposobem uniknięcia paradoksu loterii jest wykorzystanie powyższego faktu. Jak już zostało wspomniane, niezależnie od tego gdzie wyznaczymy granicę pewności, możliwe będzie skonstruowanie loterii z odpowiednią liczbą losów, która doprowadzi do paradoksu. Dzieje się tak, gdyż prawdziwe jest stwierdzenie, że dla każdej liczby rzeczywistej $c \in (0, 1)$ istnieje loteria (L), w której prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego losu (l) jest mniejsze od $1 - c$.

$$\forall c \in (0,1) \, \exists L : P(l \, wygra) < 1 - c$$

Przestawiając w powyższym zdaniu kwantyfikatory otrzymujemy zdanie:

$$\exists L \, \forall c \in (0,1) : P(l \, wygra) < 1 - c$$

Jest ono jednak fałszywe, gdyż nie istnieje loteria, w której prawdo–

Jest ono jednak fałszywe, gdyż nie istnieje loteria, w której prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego losu jest mniejsze od $1 - c$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $c \in (0,1)$. Innymi słowy, dla każdej loterii istnieje liczba rzeczywista $c \in (0,1)$ taka, że prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego losu jest większe od $1 - c$.

$$\forall\, L\, \exists\, c\, \in (0,1)\ : P(l\ wygra) \geq\ 1 - c$$

Oznacza to, że jeżeli uznamy, że Teza Locke′a jest wrażliwa na kontekst, a więc wartość granicy pewności zależy od kontekstu, w którym rozpatrujemy daną sytuację, to unikniemy paradoksu. Takie rozwiązanie prowadzi jednak do, być może, nieintuicyjnego wniosku, że niezależnie jak duża jest loteria (to znaczy jak małe prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego losu), to i tak nie jest racjonalnym uznawać, że dany pojedynczy los przegra (oczywiście nie jest też racjonalnym uznawać, że wygra). Przy takiej interpretacji, nie jest wcale racjonalnym uznanie, że kombinacja liczb *1,2,3,4,5,6* nie okaże się zwycięska w najbliższym losowaniu *Lotto*. Jednocześnie jednak nie wyklucza to uznania za irracjonalne kupna (za 3zł) losu z powyższymi liczbami[4]. Przyjmijmy jednak, że granica (c) ma charakter stały, to jest nie zależy od kontekstu. Rozważmy loterię, w której prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego losu jest mniejsze od $1 - c$. Racjonalny agent oceniając powyższe prawdopodobieństwo, robi to w oparciu o swoje (racjonalne) przekonania dotyczące m.in. charakteru loterii, rachunku prawdopodobieństwa itp. W związku z powyższym, agent nie oblicza P(los nr *i* nie wygra), lecz P(los nr *i* nie wygra | *RP*), gdzie *RP* to wspomniane przekonania[5]. Niech $c = {}^{98}\!/_{99}$, a loteria, którą rozważamy niech ma 100 losów. Racjonalny agent, znając liczbę losów w loterii (oraz to, że jeden i tylko jeden los wygrywa), słusznie oceni, że:

---

[4] *Nota bene* równie prawdopodobnymi jak dowolna inna kombinacja 6 liczb dopuszczonych do losowania.

[5] Zob. Harman 1986

$$\text{P(los nr 1 nie wygra} \mid RP) = {}^{99}\!/_{100} > {}^{98}\!/_{99}$$

a więc uzna zdanie, że los nr 1 (lub którykolwiek los rozważany jako pierwszy) nie wygra za prawdziwe. Zdanie to stanie się częścią jego racjonalnych przekonań, a więc powiększy zbiór *RP*. Analizując kolejny los, racjonalny agent oblicza:

$$\text{P(los nr 2 nie wygra} \mid RP') = {}^{98}\!/_{99}$$

gdzie *RP'* to *RP* powiększone o racjonalne przekonanie, że pierwszy rozważany los nie wygra. Ponieważ ta wartość jest równa, a nie większa od ${}^{98}\!/_{99}$, racjonalny agent nie uzna już zdania, że los nr 2 (lub którykolwiek los rozważany jako drugi) nie wygra za prawdziwe, tym samym uniknie paradoksu. Problem powyższego rozwiązania leży w arbitralnej kolejności rozważania losów. Agent rozważając jako pierwszy los nr 1 dojdzie do wniosku, że racjonalnym jest uznać, że los ten nie wygra. Co do pozostałych losów nie ma już pewności. W związku z tym, wśród jego racjonalnych przekonań znajdzie się przekonanie odnośnie jedynie losu nr 1. Gdyby jednak rozpoczął swoje rozważania od losu nr 100, to sytuacja byłaby odmienna. Nie miałby racjonalnego przekonania odnośnie losu nr 1, a odnośnie losu nr 100. Ponadto, Dana Nelkin[6] wykorzystuje tę arbitralność, by sformułować paradoks loterii w lekko zmienionej wersji:

- Przesłanka 1A: Racjonalnym jest uznać, że los nr 1 nie wygra.
- Przesłanka 2A: Jeśli racjonalnym jest uznać, że los nr 1 nie wygra, to racjonalnym jest uznać, że los nr 2 nie wygra i racjonalnym jest uznać, że los nr 3 nie wygra, ..., racjonalnym jest uznać, że los nr 100 nie wygra.
- Przesłanka 3A: Nie jest racjonalnym uznać, że zarówno żaden los nie wygra oraz, że jeden los wygra.

[6] Zob. Nelkin 2000, s. 375; paradoks w wersji Nelkin składa się w sumie z siedmiu przesłanek, poniżej przedstawiona wersja jest jego uproszczeniem.

Przesłanka 1A jest zastosowaniem Przesłanki 1' dla odpowiedniego c. Przesłanka 2A wynika ze wspomnianej wyżej arbitralności w kolejności rozważanych losów. Skoro pierwszy rozważany los (los nr 1) nie wygra, a to, że jako pierwszy rozważamy akurat ten a nie inny los było arbitralne, to to, że dany los nie wygra możemy powiedzieć o każdym losie. Stosując *modus ponens* na przesłankach 1A i 2A oraz odwołując się do rzetelności loterii otrzymujemy sprzeczność z przesłanką3A.

Wydaje się to jednak niewielkim problemem. Powyższa arbitralność jest bowiem jednocześnie zaletą przedstawionego rozwiązania. W opisanej wyżej sytuacji, dochodzimy do wniosku, że racjonalny agent uzna, że jeden konkretny (niezależnie który) los nie wygra, ale nie uzna już, że dwa konkretne losy przegrają, a Przesłanka 2A jest po prostu fałszywa[7].

Konglomeracja przekonań. Zgodnie z zasadą konglomeracji, racjonalne przekonania możemy łączyć przy pomocy koniunkcji, by uzyskać nowe racjonalne przekonania. Gdy koniunkcją łączymy zdania, które są prawdziwe, a nie jedynie prawdopodobne, otrzymujemy zdanie prawdziwe. Łącząc zdania p i q, o których możemy jedynie powiedzieć, że są prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich jest mniejsze od 1), otrzymujemy nowe zdanie $p \wedge q$, którego prawdopodobieństwo jest mniejsze od prawdopodobieństwa każdego z członów ($P(p \wedge q) < P(p)$ oraz $P(p \wedge q) < P(q)$). Prowadzi to do konfliktu z pierwszą przesłanką - o ile każde z poszczególnych zdań może mieć prawdopodobieństwo większe od c, a więc racjonalnym jest uznać je za prawdziwe, to prawdopodobieństwo koniunkcji większe od c już być nie musi. W tym miejscu warto jednak zauważyć, że Przesłanka 1 jest warunkiem wystarczającym dla uznania zdania za prawdziwe, nie jest natomiast warunkiem konieczny, a więc, to, że dane zdanie ma prawdopodobieństwo mniejsze od c, nie oznacza, że nie jest racjonalnym uznanie tegoż zdania za prawdziwe. Niemniej powyżej opisany fakt prowadzidotytułowegoparadoksu. Być może wnioskiem z paradoksu loterii, nie powinno być odrzucenie

[7] Prawdziwa byłaby następujące wersja tejże przesłanki:

• Przesłanka 2A': Jeżeli racjonalnym jest uznać, że rozpatrywany jako pierwszy los nr 1 przegra, to, jeśli los nr 2 (lub 3, ..., 100) byłby rozpatrywany jako pierwszy, również racjonalnym byłoby uznać że przegra.

którejkolwiek z przesłanek, lecz uznanie terminu *racjonalny* za termin nieostry. Terminy nieostre narażone są na tzw. paradoks kopca, który, gdy przyjmiemy, że *racjonalny* również należy do terminów nieostrych, jest bardzo zbliżony do paradoksu loterii. Paradoks kopca dla przykładowego terminu *wysoki* powstaje z połączenia trzech następujących przesłanek:

A. Osoba, która ma 2 metry wzrostu jest wysoka.
B. Jeżeli osoba X jest wysoka, to osoba o 1mm niższa od osoby X również jest wysoka.
C. Nieprawda, że osoba, która ma 1.60m jest wysoka.

oraz wielokrotnego zastosowania reguły *modus ponens* – dochodzimy do sprzeczności. Jest wiele rozwiązań paradoksu kopca, jedno z nich zaproponowane przez Timothy'ego Williamsona[8], można przenieść na paradoks loterii. Williamson proponuje, by ograniczyć zastosowanie przesłanki B. Uważa on, że istnieje granica stosowalności powyższej przesłanki, to jest (w przypadku terminu *wysoki*) istnieje dokładna liczba, która opisuje wzrost osoby, która jest wysoka, ale osoba o 1mm niższa od niej już wysoka nie jest. Granica ta jest jednak niepoznawalna. Analogicznie możemy uznać, że zasada konglomeracji przekonań może być stosowana, ale tylko do pewnego nieokreślonego (i niepoznawalnego) stopnia. Innym choć podobny do powyższego rozwiązaniem paradoksu loterii jest modyfikacja drugiej przesłanki w następujący sposób:

- Przesłanka 2': Jeżeli racjonalnym jest uznawać zdania p za prawdziwe i racjonalny jest uznawać zdanie q za prawdziwe oraz P($p \wedge q$ jest prawdziwe) $> c'$, to racjonalnym jest uznawać za prawdziwą koniunkcję tych zdań, to jest $p \wedge q$.

Jeżeli $c' \geq c$, to powyższe przesłanka jest zbędna. Jeżeli bowiem:

$$\mathrm{P}(p \wedge q \text{ jest prawdziwe}) > c' \geq c$$

[8] Williamson 1992, s. 152.

to racjonalnym jest uznać $p \wedge q$ na podstawie Przesłanki 1', nie jest do tego potrzebna Przesłanka 2. W związku z tym należy uznać, że $c' < c$. Oznacza to, że wyznaczamy dwie granica uznawalności przekonań za racjonalne. Rozwiązuje to oczywiście paradoks, ale na pewno nie usatysfakcjonuje obrońców zasady konglomeracji.

Podsumowanie. W niniejszej pracy przedstawiłem cztery możliwe rozwiązania paradoksu loterii. Paradoks loterii opiera się na trzech przesłankach. Dwa z przedstawionych rozwiązań odnoszą się do pierwszej przesłanki – Tezy Locke'a. Pierwsze z nich to próba kontekstowej interpretacji wspomnianej tezy. Teza Locke'a nie precyzuje, gdzie przebiega granica, której przekroczenie powoduje, że dane zdanie racjonalnym jest uznać za prawdziwe. Można więc argumentować, że granica ta nie jest stała, lecz zależy od kontekstu. Drugie rozwiązanie opiera się na obliczaniu prawdopodobieństwa warunkowego, a nie bezwarunkowego, dla poszczególnych zdarzeń. Dzięki temu, o ile pierwsze rozpatrywane zdarzenia mogą mieć bardzo duże prawdopodobieństwo, to kolejne (o ile są zależne od tych już rozpatrzonych, jak ma to miejsce w przypadku loterii) już nie. Kolejne dwa przedstawione rozwiązania odnoszą się do drugiej przesłanki - zasady konglomeracji przekonań. Pierwsze z nich proponuje uznanie terminu *racjonalny* za nieostry i ograniczenie zastosowania zasady konglomeracji. Drugie modyfikuje zasadę konglomeracji tak, by uniknąć uzyskiwania zdań, których prawdopodobieństwo jest mniejsze od wcześniej ustalonej stałej.

Summary

The lottery paradox arises when we consider some properties of the notion of rational acceptance. These properties when formalized turn out to be contradictory, yet each of them on its own seems appealing. In this paper, several solutions to the abovementioned paradox are presented and analyzed. Two of them challenge the, so called, Lockean Thesis, which relates the notion of rational acceptance to the notion of probability. The other two are focused on the conglomeration property of rationally accepted beliefs.

Key words: The lottery paradox, rational acceptance, Lockean Thesis, conglomeration property.

Bibliografia:

Douven 2006 I. Douven, T. Williamson: *Generalizing the Lottery Paradox*, w: "British Journal for the Philosophy of Science: Volume 57, Issue 4, s. 755-779.

Harman 1986 G. Harman: *Change in View*. MIT Press, Cambridge 1986.

Kyburg 1961 H. Kyburg: *Probability and the Logic of Rational Belief*. Wesleyan University Press, Middletown 1961.

Nelkin 2000 D. Nelkin: *The Lottery Paradox, Knowledge, and Rationality*, w: *The Philosophical Review*, Vol. 109, Nr 3, s. 373-409.

Williamson 1992 T. Williamson: *Vagueness and Ignorance*, w: *Proceedings of the Aristotelian Society*. "Supplementary Volumes", Vol. 66 (1992), s.145-177.

Wheeler 2007 G. Wheeler: *A Review of the Lottery Paradox,* w: *Probability and Inference: Essays in Honour of Henry E. Kyburg*. Jr. Edited by William Harper and Gregory Wheeler, London: King's College Publications, 2007 s. 1-31.